Méthodes mathématiques pour la physique
(examen du 14/12/2007)

Exercice 1. Considérons la fonction $f(x)$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ x & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

Calculer $\dfrac{df}{dx}$ et $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ au sens des distributions.

Exercice 2. On s'intéresse au problème suivant à conditions limites:

$$y''(x) - k^2 y(x) = f(x), \qquad y'(0) = y(l) = 0, \qquad x \in [0, l]. \tag{1}$$

1. Démontrer que les points $x = 0$ et $x = l$ sont conjugués.
2. Calculer la fonction de Green de ce problème.
3. A l'aide de la fonction de Green, trouver la solution du problème pour $f(x) = 1$. Vérifier le résultat avec (1).

Exercice 3 (oscillateur harmonique forcé). On considère l'équation suivante:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = R(t), \tag{2}$$

munie des conditions initiales

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0. \tag{3}$$

Ici β, ω_0, v_0 sont constants, $R(t)$ est une fonction quelconque.

1. Trouver la solution de l'équation homogène ($R(t) = 0$) vérifiant les conditions (3).
2. En utilisant la méthode de la fonction de Green, trouver la solution de l'équation (2) vérifiant les conditions initiales homogènes ($v_0 = 0$). On peut supposer que $\omega_0^2 > \beta^2$.
3. En utilisant deux résultats précédents, écrire la solution du problème (2)–(3). Expliciter le résultat pour $R(t) = \alpha t$.

Exercice 4 (résolution de l'équation de la chaleur à l'aide de la transformée de Fourier). On s'intéresse à l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{4}$$

munie des conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \qquad x \in (-\infty, \infty), t \geq 0. \tag{5}$$

C'est une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution de la distribution de température dans 1 dimension ($u(x, t)$ note la température en point x à l'instant t, α est une constante réelle positive caractérisant la conductivité thermique).

1. Introduisons la transformée de Fourier de $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega$$

   Quelle équation différentielle ordinaire vérifie $\hat{u}(\omega,t)$? Résoudre cette équation et exprimer $\hat{u}(\omega,t)$ en fonction de $\hat{u}(\omega,0)$.

2. Exprimer $\hat{u}(\omega,0)$, $\hat{u}(\omega,t)$ et $u(x,t)$ en fonction de $f(x)$. Ecrire la réponse sous la forme

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,x;x')f(x')dx'.$$

   Simplifier l'expression pour $G(t,x;x')$ en utilisant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2+bs}ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right).$$

Remarque: $G(t,x;x')$ est appelée la fonction de Green du problème (4)–(5) (ou noyau de la chaleur).